Расчетно-графическое задание №1
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННОГО РЯДА

Задание

Получите решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$, $y(a) = y_a$ в виде отрезка степенного ряда (ограничиться четырьмя-пятью членами). Получите точное аналитическое решение. Постройте графики двух решений. Сделайте вывод о точности решения.

На отрезке $[a, b]$ выделите участки, где графики решений совпадают и участки, где графики расходятся на максимальное расстояние, сделайте вывод.

Схема решения

Пусть имеется уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

и пусть требуется найти его решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее условию

$$y\big|_{x=x_0} = y_0\,, \tag{2}$$

т.е. $\varphi(x_0) = y_0$. Будем предполагать, что искомое решение $y = \varphi(x)$ разложимо в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \frac{\varphi'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{\varphi''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \tag{3}$$

Коэффициенты разложения можно найти с помощью уравнения (1) и начальных условий (2). В силу начального условия (2) имеем $\varphi(x_0) = y_0$, где y_0 — заданное число.

Если теперь в уравнении (1) положить $x = x_0$ и в соответствии с этим $y = y_0$, то оно определит значение y_0' производной $\varphi'(x)$ искомой функции $\varphi(x)$ при $x = x_0$ (так как функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (1)), и мы получим

$$y_0' = \varphi'(x_0) = f(x_0, y_0)\,.$$

Продифференцируем по x обе части уравнения (1), помня, что y и y' являются функциями от x. Будем иметь

$$y'' = f_x'(x, y) + f_y'(x, y)\,y'\,. \tag{4}$$

Положив теперь в правой части (4) $x = x_0$ и в соответствии с этим $y = y_0$, $y' = y_0'$, мы получим в левой части (4)

$$y_0'' = \varphi''(x_0) = f_x'(x_0, y_0) + f_y'(x_0, y_0)\,y_0'$$

и т.д. Так последовательно можно определить все коэффициенты в ряде (3).

Варианты заданий

1. $y' - \frac{y}{x} = x^2,\ y(1) = 0$.

2. $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

3. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,\ y(0) = 0$.

4. $y' + y\operatorname{tg} x = \cos^2 x,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x,\ y(-1) = \frac{3}{2}$.

6. $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1),\ y(0) = 1$.

7. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

8. $y' + \frac{y}{x} = \sin x,\ y(\pi) = \frac{1}{\pi}$.

9. $y' + \frac{y}{2x} = x^2,\ y(1) = 1$.

10. $y' + \frac{2xy}{x^2+1} = \frac{2x^2}{x^2+1},\ y(0) = \frac{2}{3}$.

11. $y' + \frac{(2x-5)y}{x^2} = 5,\ y(2) = 4$.

12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x,\ y(1) = e$.

13. $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x},\ y(1) = 1$.

14. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3},\ y(1) = 4$.

15. $y' + \frac{2y}{x} = x^3,\ y(1) = -\frac{5}{6}$.

16. $y' + \frac{y}{x} = 3x,\ y(1) = 1$.

17. $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2,\ y(1) = 3$.

18. $y' + \frac{(1-2x)y}{x^2} = 1,\ y(1) = 1$.

19. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$.

20. $y' + 2xy = -2x^3$, $y(1) = \dfrac{1}{e}$.

21. $y' + \dfrac{xy}{2\left(1 - x^2\right)} = \dfrac{x}{2}$, $y(2) = 1$.

22. $y' + xy = -x^3$, $y(0) = 3$.

23. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^2 e^x$, $y(0) = 1$.

24. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x$, $y(0) = 1$.

25. $y' + \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$.

26. $y' - y\cos x = -\sin 2x$, $y(0) = 3$.

27. $y' - 4xy = -4x^3$, $y(0) = -\dfrac{1}{2}$.

28. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$.

29. $y' - 3x^2 y = x^2 \dfrac{1 + x^3}{3}$, $y(0) = 0$.

30. $y' - y\cos x = \sin 2x$, $y(0) = -1$.